

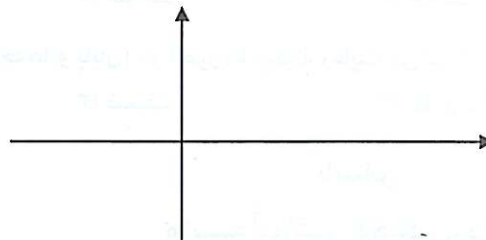


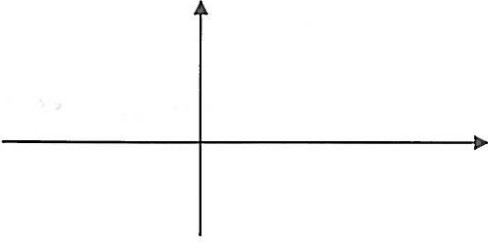
باسمه تعالی
 جمهوری اسلامی ایران
 اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره آموزش و پرورش منطقه ۷ تهران

دبیرستان هاتف دوره دوم (غیر دولتی)

نام و نام خانوادگی:	پایه: چهارم دبیرستان	کلاس:
درس: ریاضی عمومی	وقت امتحان: ۹۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک
نام دبیر: جناب آقای بیگلری	نوبت اول - سال تحصیلی: ۹۵-۹۶	تاریخ: ۹۵/۱۰/۱۹

ردیف	سؤال	بارم
۱	در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم X . تعداد موش های سفید خارج شده است. جدول توزیع احتمال را تشکیل دهید و کمترین و بیشترین مقدار در توزیع احتمال را مشخص نمایید.	۱/۵
۲	در آزمایشگاهی از ۶۰ دانه ی کاشته شده ی نوعی بذر، ۴۸ دانه جوانه زده اند. اگر ۳ دانه از این نوع بذر کاشته شود، با چه احتمالی فقط ۲ دانه از آن ها جوانه می زنند؟	۱/۵
۳	دوتاس را پرتاب می کنیم اگر مجموع اعداد روبرو شده بزرگتر از ۸ باشد. با چه احتمالی هر دو عدد روبرو شده زوج است؟	۱/۵
۴	اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ را بیابید.	۱
۵	نمودار توابع زیر را رسم نمایید. و دامنه و برد هریک را مشخص نمایید. $f(x) = 2x - [2x]$ $x \in [-2, 2]$ (الف)	۲



۲	<p>الف) معادله زیر را حل کنید.</p> <p>ب) $f(x) = -x - 2 + x$</p>  <p>ب) $3x^2 - 4x = \frac{1}{[x] + [-x]}$</p> <p>ب) از دو معادله $2^x + 4^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y را بیابید.</p>	۶
۱	<p>در یک نوع کشت، تعداد باکتری ها بعد از t دقیقه برابر $f(t) = Ae^{-0.3t}$ است. اگر در این نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود باشد، بعد از چند دقیقه ۱۰۰۰ باکتری وجود خواهد داشت؟ ($\ln 5 = 1/62$)</p>	۷
۱/۵	<p>در یک دنباله ی عددی مجموع ۱۲ جمله ی اول دو برابر مجموع چهار جمله ی اول آن است. اگر جمله ی پنجم ۱۹ باشد. قدر نسبت دنباله را بیابید.</p>	۸

۱/۵	معادله ی مثلثاتی $\sin x + \cos x = 1$ را حل نمایید .	۹
۲	<p>الف) کران داری و یکنوایی دنباله ی $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right\}$ را بررسی کنید .</p> <p>ب) کوچکترین کران بالای دنباله ی $\left\{ \frac{n^p}{p^n} \right\}$ برابر است با</p>	۱۰
۳	<p>مشتق عبارت های زیر را نسبت به x محاسبه کنید .</p> <p>الف) $f(x) = \cos(\sqrt[3]{(2x+1)^2})$</p> <p>ب) $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2 - 2x + 3}\right)$</p> <p>ج) $x \sin y + x + y = 0$</p>	۱۱
۱/۵	معادله ی خط مماس بر منحنی به معادله ی $y = \frac{x^2+x}{x-2}$ در نقطه ای به طول ۱- واقع بر آن را بنویسید .	۱۲

۱. دو تاس را با هم می ریزیم، با کدام احتمال عدد یکی از تاسها ۵ یا مجموع دو عدد رو شده برابر ۵ است؟

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{18}$

۲. فردی به ۳ پرسش ۳ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ درست داده است؟

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{4}{27}$

۳. سکه‌ی سالمی را ۵ بار می‌اندازیم، احتمال این که حاصل همه‌ی پرتابها یکسان نباشند، کدام است؟

(۱) $\frac{31}{32}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۴. در پرتاب دو تاس سالم با هم، اگر A پیشامد آن که عدد رو شده‌ی تاس اول ۴ باشد و B پیشامد آن که اعداد رو شده‌ی دو تاس متمایز باشند، $P(A-B)$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{36}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۵. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۸۴

۶. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}, 1$ (۴) $-1, \frac{9}{5}$

۷. مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه‌ی (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{3}$ می‌باشد. بیشترین مقدار $b-a$ ، کدام است؟

(۱) ۵٫۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

۸. لگاریتم عددی در پایه‌ی ۴ برابر $\frac{15}{4}$ است. لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه‌ی ۸ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$ (۲) -۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) -۵

۹. معادله‌ی $\log(x-2) + \log(x+1) = \log x + \log(x-7)$ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بیشمار

۱۰. مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{7\pi}{5}$ (۳) $\frac{5\pi}{8}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۱۱. دنباله‌ی $an = \frac{2n-1}{n+1}$ چگونه است؟

(۱) همگرا و نزولی (۲) همگرا و صعودی (۳) واگرا و نزولی (۴) واگرا و صعودی

۱۲. دنباله‌ی $an = \frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$ چگونه است؟

(۱) بی کران (۲) صعودی (۳) نزولی (۴) همگرا

۱۳. کدام دنباله از بالا و پایین کراندار و صعودی است؟

(۱) $un = \frac{3^n}{n^3}$ (۲) $un = \cos \frac{\pi}{n}$ (۳) $un = \frac{n^2+3}{n^2+1}$ (۴) $un = (-1)^{n+1}$

۱۴. اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر باشد، (a, b) کدام است؟

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 3)$ (۳) $(3, -3)$ (۴) $(2, -2)$

۱۵. مقدار مشتق تابع $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ در $x = \frac{5\pi}{6}$ چقدر است؟

(۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $-4\sqrt{3}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

۱۶. اگر $f(x) = \sqrt{\tan \pi \sqrt{x}}$ ، آنگاه $f'(\frac{1}{16})$ کدام است؟

(۱) 2π (۲) ۱ (۳) π (۴) ۲

۱۷. مشتق تابع $y = e^{\frac{\ln x^2 + 1}{x^2 + 2}}$ در نقطه‌ی $x = -1$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

این صفحه را در دفتر خودتان یادداشت کنید

۱۸. اگر $u = \sin 2x$ و $y = \frac{1}{\sqrt{2u}}$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $-\sqrt{3}$

(۴) $-2\sqrt{3}$

۱۹. در دنباله‌ی $an = \frac{2}{3}n + 1$ مجموع جملات هفتم تا پانزدهم چقدر است؟

(۱) ۸۵

(۲) ۷۵

(۳) ۶۵

(۴) ۵۵

۲۰. جملات اول، سوم و نهم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله‌ی هندسی غیر ثابت‌اند. جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی چند برابر قدر نسبت آن است؟

(۱) ۴

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۱

۱۱. کریمه ۴
 $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$

عدد مورد نظر را ۵ را به نظر می گیریم طبق فرض داریم:

۱۲. کریمه ۴
 $\log_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2^2 = \frac{1}{2}$

۱۳. کریمه ۴
 $\log_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2^2 = \frac{1}{2}$

۱۴. کریمه ۴
 $\log_2^2 + \log_2^2 = \log_2^2$

۱۵. کریمه ۴
 $\log(x-2) + \log(x+1) = \log(x-7) + \log(x-2) + \log(x+1) = \log(x-7)$

جواب ۳: x غیر قابل قبول است چون جبری انگاریم را نمی می کند.

۱۶. کریمه ۴
 $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۱۷. کریمه ۴
 $\cos^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x$

۱۸. کریمه ۴
 $\frac{x \in [0, \pi]}{k=1: \sin x = \frac{\pi}{2}, \cos x = \frac{\pi}{2}}$

۱۱. کریمه ۴

۱۹. کریمه ۴
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n-1} = 2$

۱۲. کریمه ۴

۲۰. کریمه ۴
 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

دنباله نه مسودی و نه نزولی است.

۲۱. کریمه ۴
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\text{عدد}}{\pm \infty} = 0$

بنابراین دنباله a_n به صفر همگرا است، در نتیجه کراندار هم هست.

۲۲. کریمه ۴
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

۲۳. کریمه ۴
 $\cos \pi = -1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۴. کریمه ۴
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{n^2 + 5} = 1$

۲۵. کریمه ۴
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

۲۶. کریمه ۴
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$

۲۷. کریمه ۴
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$

۹. مابقی مسائل ریاضی ششم

۱. کریمه ۴

۱. کریمه ۴
 $n(A) = 10, n(B) = 5, n(A \cap B) = 3$

۲. کریمه ۴
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

در این مسئله، بیروزی یعنی پاسخ درست دادن

۳. کریمه ۴
 $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1}$

۳. کریمه ۴

پس برای محاسبه احتمال این که حاصل همه برتله ها یکسان باشند، از شتم استفاده می کنیم:

۴. کریمه ۴
 $P(A) = 1 - P(A^c) \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۴. کریمه ۴

۵. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

۶. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

۷. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

۸. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

۹. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

۱۰. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

برای این منظور باید نامعادله $f(x) > \frac{1}{x}$ را حل کنیم.

۱۱. کریمه ۵
 $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\}$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad \text{و} \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{۱۵. گزینیه ۲ می دانیم: } \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$x = \frac{\Delta \pi}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{\Delta \pi}{2} \cos \frac{\Delta \pi}{2}}{(1 - \sin \frac{\Delta \pi}{2})^2} = \frac{-r \cos \frac{\pi}{2}}{(1 - \sin \frac{\pi}{2})^2} = \frac{-r(0)}{(1 - 1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \sqrt{\tan \pi \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\pi \sqrt{x})'(1 + \tan^2 \pi \sqrt{x})}{r \sqrt{\tan \pi \sqrt{x}}} = \frac{\pi}{r \sqrt{\tan \pi \sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{12}) = \frac{\frac{\pi}{r \sqrt{\tan \pi \sqrt{\frac{1}{12}}}}}{r \sqrt{\tan \pi \sqrt{\frac{1}{12}}}} = \frac{\pi}{r^2 (1 + \tan^2 \frac{\pi}{12})} = \frac{\pi}{r^2 (1)}$$

۱۷. گزینیه ۲ می دانیم: $u = \ln u$

$$y = e^{\frac{x^2+1}{x^2+2}} = \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1 - \frac{1}{x^2+2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow y'(-1) = \frac{-2}{(1+2)^2} = -\frac{2}{9}$$

۱۸. گزینیه ۳

$$y = \frac{1}{\sqrt{r \sin^2 x}} = (r \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} (2 \times r \cos^2 x)(r \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1}{2} (r^2 \cos^2 \frac{\pi}{12}) (r \sin^2 \frac{\pi}{12})^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} (r^2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{3}$$

اینه می شود از هر کدام جداگانه مشتق گرفت و در هم ضرب کرد (مشتق زنجیری)
 ۱۹. گزینیه ۲ می دانیم: $d = a_1 + (n-1)d$
 در این دنباله حسابی، جمله اول $a_1 = \frac{d}{2} + 1 = \frac{d}{2} + 1$ و قدر نسبت $d = \frac{d}{2}$ (ضرب n در جمله، برابر قدر نسبت است)

$$a_7 = a_1 + 6d = \frac{d}{2} + 4 = \frac{17}{2}$$

$$a_8 = a_1 + 7d = \frac{d}{2} + \frac{7d}{2} = \frac{8d}{2} = 4d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \rightarrow S_9 = \frac{9}{2} \left(\frac{17}{2} + \frac{7d}{2} \right) = \frac{9}{2} \left(\frac{24}{2} \right) = 78$$

دقت کنید از جمله ی هفتم تا جمله ی نهم شامل نه جمله است.
 ۲۰. گزینیه ۲

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \rightarrow a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r \rightarrow a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r \Rightarrow a_1^2 + r^2 + 4r^2 + 9r^2 = a_1^2 + 14r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2 = 14r^2 - a_1^2 \Rightarrow a_1^2 = 10r^2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{10}r$$

دنباله ی هندسی $a, b, c \rightarrow ac = b^2$
 می دانیم: $a_1 = a_1 + (n-1)d$
 دنباله ی حسابی